www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A

l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement

1990

MATHEMATIQUES II

Options M et P.

Durée : 4 heures.

Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm et de repérer clairement sur sa copie les différentes parties du sujet.

PROBLEME

Un anneau unitaire est un ensemble d'au moins deux éléments, muni d'une loi de groupe abélien, et d'une loi associative distributive pour la loi de groupe, admettant un élément neutre.

E et F sont des espaces vectoriels réels, de dimensions respectives p et n, non nulles.

f est une application linéaire non nulle de E vers F, donc $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

0 est l'élément nul de $\mathcal{L}(E, F)$.

On désigne par : $\Omega(f)$ l'ensemble des endomorphismes de F, g, tels que : (1) $g \circ f = 0$,

$\Gamma(f)$ l'ensemble des endomorphismes de F, h, tels que : (2) $h \circ f = f$,

$\Gamma'(f)$ l'ensemble des éléments h de $\Gamma(f)$ qui sont inversibles.

PREMIERE PARTIE

A - 1 - Montrer que $\Omega(f)$ est un espace vectoriel réel, et qu'il est stable pour la composition des endomorphismes sur F.

$\Omega(f)$ contient-il l'identité ? Est-ce un sous-anneau unitaire de (F) ?

2 - Montrer que $\Gamma(f)$ est non vide, qu'il est stable pour la composition des endomorphismes de F, puis que $\Gamma'(f)$ est un groupe pour la composition des endomorphismes de F.

B - Dans cette question n = p. Le rang de f, noté r, vérifie r < n.

1 - g décrivant $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r', r' étant le rang de g.

2 - Montrer qu'on peut trouver des bases B de E et B' de F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit la matrice A dont le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne a_{ij} vérifie $a_{ij} = 1$ si $i \leq r$, et $a_{ij} = 0$ sinon.

3 - En déduire la dimension de $\Omega(f)$. $(\Omega(f), +, \circ)$ est-il un anneau unitaire ?

C - Dans cette question E et F sont de dimension 3 rapportés à deux bases B_1 et B'_1 et f est l'application linéaire dont la matrice pour ces bases est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer sur B', les matrices des éléments de $\Omega(f)$, $\Gamma(f)$, $\Gamma'(f)$.

DEUXIEME PARTIE Le rang de f est maintenant le plus petit des deux entiers n et p.

A - On suppose $p = n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

B - On suppose $p > n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

C - On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de la troisième partie du problème que $p < n$.

1 - g décrivant $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de r', r' étant le rang de g.

2 - Montrer qu'on peut trouver des bases B de E et B' de F pour lesquelles la matrice de f est la matrice A, dont on précisera le nombre des lignes et celui des colonnes, dont le coefficient de la i ème ligne et de la j ième colonne a_{ij} est tel que $a_{ii} = 1$ si $i \in [1, p]$, et $a_{ij} = 0$ sinon.

En déduire :

a - l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à g respectivement à la base B', lorsque g décrit $\Omega(f)$, puis l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à h respectivement à la base B' lorsque h décrit $\Gamma(f)$ et, enfin, lorsque h décrit $\Gamma'(f)$.

b - la dimension de $\Omega(f)$.

Les matrices demandées dans cette question seront données sous forme de blocs.

TROISIEME PARTIE On rappelle que $p < n$.

On se propose d'étudier l'équation d'inconnue w où w est une application linéaire :

(3) $f \circ w = h$, h étant un élément donné de $\Gamma(f)$.

1 - Préciser l'espace de départ et l'espace d'arrivée d'une éventuelle solution de cette équation.

2 - Montrer que si cette équation admet des solutions, alors :

a) h est un projecteur,
b) h est de rang au plus p,
c) h est de rang exactement p,
d) l'image de h est celle de f,
e) l'équation (3) a exactement une solution.

3 - Soit alors h un projecteur dont l'image est celle de f.
En utilisant les bases B et B' déjà définies dans la deuxième partie, résoudre l'équation (3). Déduire du résultat une condition nécessaire et suffisante portant sur h, pour que (3) admette une solution.

QUATRIEME PARTIE

Résoudre l'équation (4). (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . W = H$

où H est une matrice carrée à trois colonnes donnée telle que :

(4) $H . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et où W est une matrice inconnue.

T.S.V.P.

EXERCICE DE GEOMETRIE ANALYTIQUE

L'espace usuel est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les axes sont notés Ox , Oy , Oz .

Σ est la surface définie par l'ensemble des points $M(\lambda, \mu)$ tels que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, et que :

$$\overrightarrow{OM}(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu} + \frac{\mu^2}{\lambda}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\vec{j} + \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}\right)\vec{k}$$

1 - Déterminer (nature, projections sur les trois plans de coordonnées) l'ensemble des points $M(a, a)$ quand a décrit $\mathbb{R}^*$.

2 - On pose $\lambda + \mu = s$, et $\lambda \mu = p$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ décrit par (s, p), quand (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

3 - On fixe s . M décrit alors une courbe L_s. Montrer que L_s est, en général, la réunion de deux demi-droites dont on précisera les origines A_s et B_s , la cote de A_s étant inférieure à celle de B_s .
Comparer l'ensemble des points B_s et la courbe obtenue à la question 1- .

4 - S étant la surface décrite par le segment $[A_s, B_s]$ en donner une représentation paramètrique de la forme :

$$\overrightarrow{OP}(s, t) = \overrightarrow{OA_s} + t \cdot \overrightarrow{A_s B_s}$$

Donner une équation cartésienne du plan tangent en $P(s, t)$ à S. Ce plan tangent peut-il être parallèle à Oz ? Si oui, en quels points ?

5 - La réunion Q des surfaces Σ et S est portée par une quadrique Q' . Donner une équation réduite de Q' , préciser ses éléments de symétrie et sa nature.

6 - Trouver toutes les droites tracées sur Q . On trouve deux familles de droites. Pour chacune de ces droites D , trouver l'ensemble des couples (λ, μ) tels que $M(\lambda, \mu) \in D$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail